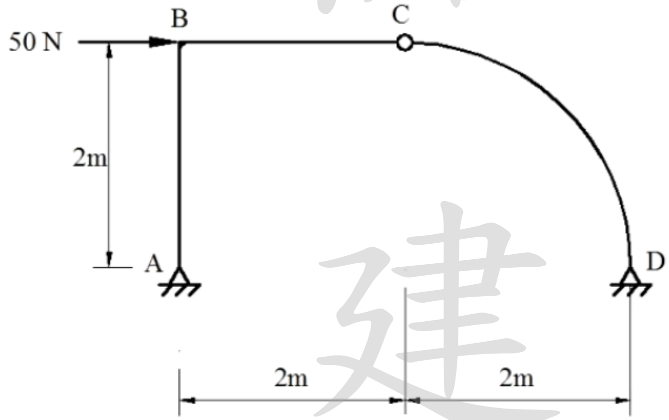
104年公務人員高等考試三級考試試題

類　　別：土木工程
科　　目：工程力學（包括材料力學）
考試時間：2小時

※注意：(一)可以使用電子計算器。
(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

程中鼎老師　主解

一、圖一所示構架中，CD 為四分之一圓弧形。ABC 段及 CD 段每單位長度的自重皆為 10 N/m，B 點受一大小為 50 N 的水平集中載重，在考慮自重的情況下，試求 A 點及 D 點的反力。（25 分）

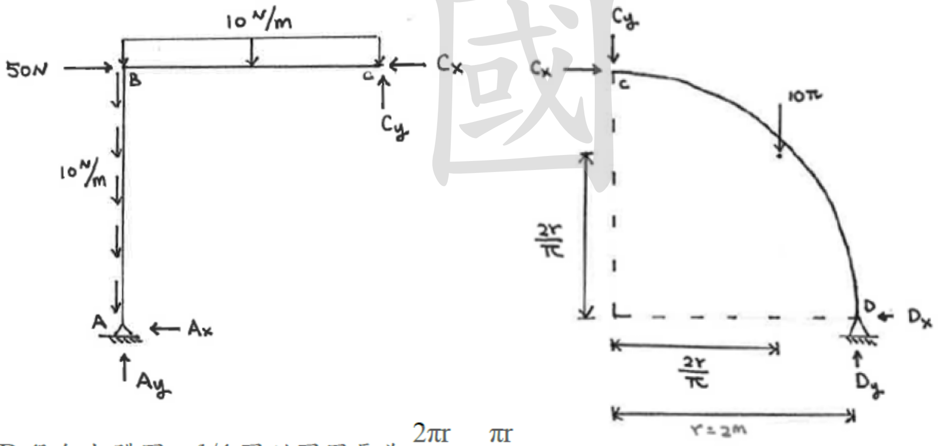


圖一

解

取 ABC 段自由體圖，根據力平衡方程式可寫出下列關係

$\sum M_A = 0 \quad 2C_x+2C_y = 120 \ldots(1)$



取 CD 段自由體圖，1/4 圓的圓周長為 $\frac{2\pi r}{4}=\frac{\pi r}{2}$

自重造成的力量＝單位長度自重×1/4 圓的圓周長 $=10\times\frac{\pi r}{2}=10\pi$ N，會作用在距圓心 $\frac{2r}{\pi}$ 處。

根據力平衡方程式可寫出下列關係

$$\sum M_D=0 \quad 2C_y-2C_x+10\pi(r-\frac{2r}{\pi})=0 \Rightarrow 2C_y-2C_x=22.832\ldots(2)$$

由(1)及(2)式可解出 C_x 及 C_y

$C_x=35.708$ N

$C_y=24.292$ N

將 C_x 及 C_y 分別代回 ABC 段及 CD 段，可得 A 點及 D 點反力

$\underline{A_x=14.292\text{ N }(\leftarrow)}$

$\underline{A_y=15.708\text{ N }(\uparrow)}$

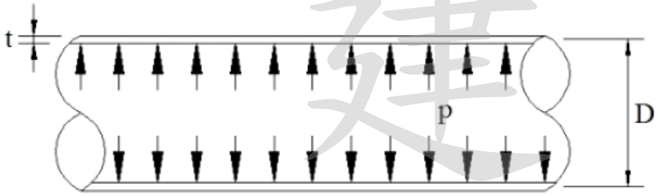
$\underline{D_x=35.708\text{ N }(\leftarrow)}$

$\underline{D_y=55.708\text{ N }(\uparrow)}$

二、一長度甚長的橡膠輸氣管，直徑 D = 1 m，管壁厚 t = 1 cm，管內的氣壓 $p=50\text{ kN/m}^2$，如圖二所示。已知橡膠的彈性模數 E = 50 MPa，柏松比 ν = 0.45，試求：

㈠橡膠延軸向、環向及厚度方向的正向應力。（15 分）

㈡橡膠的單位體積變化量。（10 分）



圖二

解

(一)橡膠沿軸向、環向及厚度方向的正向應力

題目附圖所示輸氣管為開口，故軸向應力 $\sigma_a=0$

環向應力 $\sigma_r=\frac{Pr}{t}=\frac{50(0.5)}{1\times10^{-2}}=2.5\times10^3\text{ kPa}=2.5\text{ MPa}$

厚度方向正向應力分成輸氣管內、外表面探討，若為內表面其正向應力 $\sigma_t=P=50$ kPa(壓應力)；若為外表面其正向應力 $\sigma_t=0$

(二)橡膠單位體積變化量

以下分成內、外表面探討，若為內表面

$$\varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E}-\nu\frac{\sigma_y}{E}-\nu\frac{\sigma_z}{E}=0-\frac{0.45}{50}\left(2.5-50\times10^{-3}\right)=-0.02205$$

$$\varepsilon_y=\frac{\sigma_y}{E}-\nu\frac{\sigma_x}{E}-\nu\frac{\sigma_z}{E}=\frac{1}{50}\left(2.5+0.45\times50\times10^{-3}\right)=0.05045$$

$$\varepsilon_z=\frac{\sigma_z}{E}-\nu\frac{\sigma_x}{E}-\nu\frac{\sigma_y}{E}=\frac{1}{50}\left(-50\times10^{-3}-0.45\times2.5\right)=-0.0235$$

單位體積變化量$\varepsilon_V=(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)-1$

$=(1-0.02205)(1+0.05045)(1-0.0235)-1=\underline{0.00315(增加)}$

若為外表面

$$\varepsilon_x=0-\frac{0.45}{50}(2.5)=-0.0225=\varepsilon_z$$

$$\varepsilon_y=\frac{2.5}{50}-0=0.05$$

單位體積變化量$\varepsilon_V=(1-0.0225)^2(1+0.05)-1=\underline{0.00328\ (增加)}$

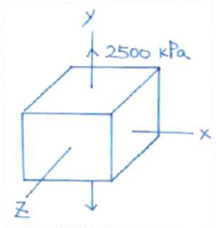


圖 外表面微素應力圖

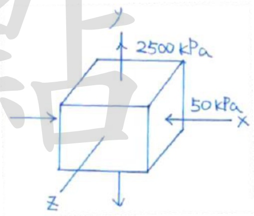
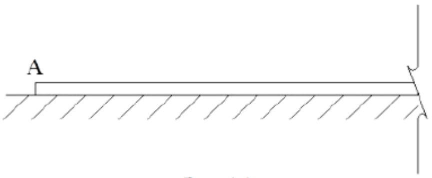


圖 內表面微素應力圖

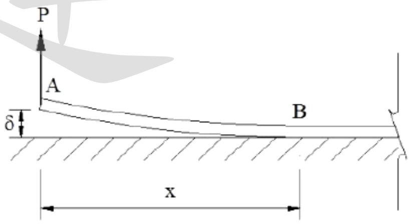
三、一均勻斷面且長度甚長的鋼纜置於水平的剛性地面如圖三(a)所示，鋼纜的彈性模數為 E，斷面慣性矩為 I，每單位長度的重量為 w。在鋼纜 A 端施加一向上的 P 力，使鋼纜一部分被拉起，如圖三(b)所示，其中 A 點和 B 點間為被拉離地面的部分，假設 $\delta << x$。試求：

(一) AB 之間的距離 x。（12 分）

(二) A 點的變位量 δ（列出與 w 及 x 的關係）。（13 分）



圖三(a)



圖三(b)

解

(一) AB 之間的距離 x

B 點彎矩為零(因其曲率$\kappa=0$)，對 B 點取力矩平衡

$$\sum M_B=0\qquad Px-(wx)\frac{x}{2}=0\Rightarrow\frac{wx^2}{2}-Px=0$$

可解距離$\underline{x=\dfrac{2P}{w}}$

(二) A 點的變位量δ

A 點和 B 點間距離可視為懸臂梁承受均佈載重 w 及自由端承受一集中荷重 P 之組合

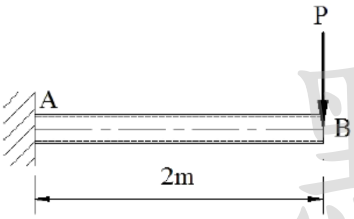
$$\delta=\frac{Px^3}{3EI}-\frac{wx^4}{8EI}=\underline{\frac{2P^4}{3EIw^3}\ (\uparrow)}$$

四、圖四(a)懸臂梁在 B 端受到一集中載重 P，懸臂梁的斷面如圖四(b)所示。

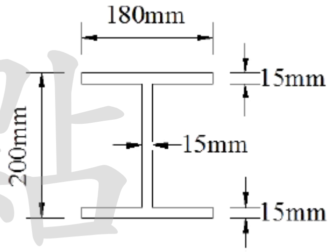
㈠當 $P=6\ kN$ 時，試求此懸臂梁的最大正向應力 σ_{max} 及最大剪應力 τ_{max}。（10 分）

㈡當 P 漸漸增加，此懸臂梁開始因張應力承受能力不足而出現裂紋時，則此時裂紋的位置及方向為何？請以簡圖表示。（7 分）

㈢當 P 漸漸增加，此懸臂梁開始因剪應力承受能力不足而出現裂紋時，則此時裂紋的位置及方向為何？請以簡圖表示。（8 分）



圖四(a)



圖四(b)

解

(一)當 $P=6\ kN$ 時懸臂梁最大正向應力 σ_{max} 及最大剪應力 τ_{max}

梁中最大彎矩 $M_{max}=PL=6\times2=12\ kN\text{-}m$

強軸慣性矩 $I=\dfrac{1}{12}\left(180\times200^3-165\times170^3\right)=52446250\ mm^4$

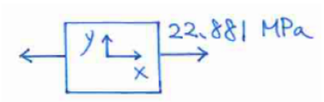
中性軸處之面積一次矩 $Q=180\times15\times92.5+85\times15\times42.5=303937.5\ mm^3$

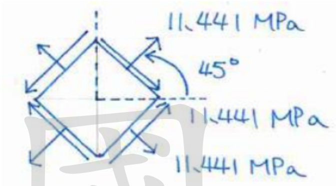
最大正向應力 $\sigma_{max}=\dfrac{M_{max}y_{max}}{I}=\dfrac{\left(12\times10^6\right)(100)}{52446250}=\underline{22.881\ MPa}$

最大剪應力 $\tau_{max}=\dfrac{V_{max}Q}{Ib}=\dfrac{\left(6\times10^3\right)(303937.5)}{(52446250)(15)}=\underline{2.318\ MPa}$

(二)繪因張應力不足時之裂紋

固定端梁頂之應力如下:



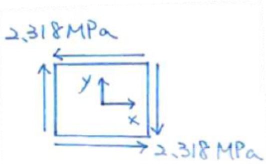


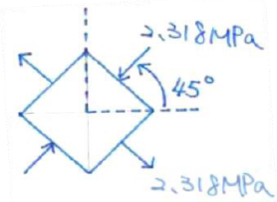
最大主應力 $\sigma_{p1}=22.881\ MPa$

最小主應力 $\sigma_{p2}=0$

最大剪應力 $\tau_{max}=\dfrac{\sigma_{p1}}{2}=11.441\ MPa$

固定端梁中性軸之應力如下:





最大主應力 $\sigma_{p1} = 2.318$ MPa

最小主應力 $\sigma_{p2} = -2.318$ MPa

最大剪應力 $\tau_{max} = 2.318$ MPa

故張應力不足時之裂紋會出現在**梁頂處**，其方向與σ_{p1}垂直，如下左圖

(三)繪因剪應力不足時之裂紋

會出現在梁頂及梁底處，其方向呈 45 度，如下右圖